

## Особенности итерационных методов построения фракталов

А. Г. Буховец, email: abuhovets@mail.ru <sup>1</sup>

А. К. Горностаев, email: agornostaevv@gmail.com.<sup>2</sup>

1 Воронежский государственный аграрный университет имени

Императора Петра 1

2 Московский технологический университет (МИРЭА)

**Аннотация.** В работе рассматриваются итеративные способы построения фракталов. Показывается, что при всех различных рассмотренных методов они обладают общими характеристиками, которые формируют существенно схожие свойства результативных множеств, такие как самоподобие и нульмерность.

**Ключевые слова:** Фрактальные множества, рандомизированные системы итерированных функций, аттрактор, треугольник Серпинского.

### Введение.

Начнём с построения хорошо известного, можно сказать классического фрактала, - треугольника Серпинского (по другим, переводным источникам, – салфетка Серпинского). Процесс построения является итеративным и может быть неограниченно продолжен. Начинается процесс с выбрасывания центральной четверти треугольника и с последующим применением этого правила к трем вновь образовавшимся треугольникам [1]. Этот итерационный процесс достаточно хорошо представлен в литературе [2, 3] и, на наш взгляд, понятен из рис.1.



Рис. 1. Первые два шага построения треугольника Серпинского

## 1. Итерационный метод построения фрактального множества

Наряду с этим построением рассмотрим процесс выполнения рандомизированной системы итерированных функций (РСИФ) [2,4]

$$x_{n+1} = \xi x_n + (1 - \xi) z_j^{(n)} \quad (1)$$

с параметром  $\xi = 1/2$  и протофракталом  $Z = \{A(0,0), B(0,1), C(1,0)\}$  с равновероятным выбором вершин треугольника  $\Delta ABC$ . Результат построения будет практически таким же, в чём можно убедиться, посмотрев на рис.2.

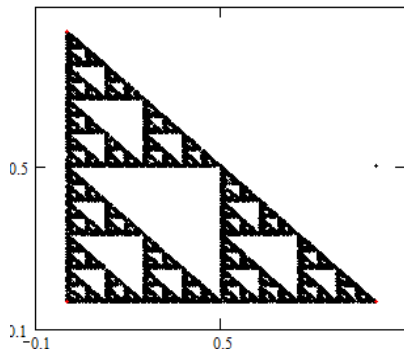


Рис. 2. Результат выполнения процедуры РСИФ

Возникает вопрос: почему перечисление точек РСИФ процедурой (1) приводит к тому же результату, что и итеративный способ построения треугольника Серпинского? Возможность совпадения результатов не является очевидной, хотя геометрические представления довольно близки с учётом стохастического характера выполнения процедуры РСИФ.

## 2. Геометрический метод построения фрактального множества

Наряду с этим рассмотрим следующую задачу. Стержень единичной длины – отрезок  $[0; 1]$ , случайным образом ломают на три части. Какова вероятность, что из полученных частей можно будет составить треугольник?

Для геометрического решения этой простой задачи введём три неотрицательных величины  $x, y, z = 1 - x - y$  представляющие длины получившихся отрезков. Для того, чтобы из этих отрезков можно было составить треугольник, необходимо и достаточно выполнение следующих условий

$$\begin{cases} x + y < z, \\ x + z < y, \text{ что равносильно} \\ y + z < x. \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1/2, \\ y < 1/2, \\ x + y > 1/2. \end{cases} \quad (2)$$

с учётом равенства  $x + y + z = 1$ . Графическое решение этой системы представлено на рис.3.

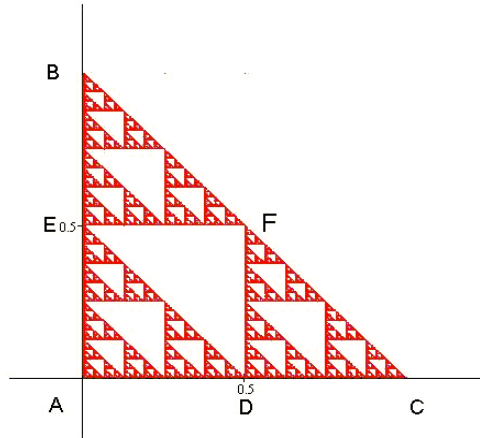


Рис. 3. Графическое решение системы (3)  $\triangle DFE$  .

Таким образом, в точках  $\triangle DFE$  выполняются требования условий (2). В то время как в  $\triangle DCE$ ,  $\triangle EFB$ ,  $\triangle ADE$  условия (2) нарушены, т.е. выполняется хотя бы одно из неравенств (3):

$$z > x + y, \quad y > x + z, \quad x > y + z \quad (3)$$

Причём неравенство  $z > x + y$  выполняется в  $\triangle ADE$ ,  $y > x + z$  в  $\triangle EFB$ ,  $x > y + z$  в  $\triangle DCE$ . Эти неравенства выполняются почти для всех точек указанных треугольников, а случаи равенства, относящиеся к граничным точкам, не будем принимать во внимание.

Фактически это означает, что в каждом из вновь полученных треугольников  $\triangle DCE$ ,  $\triangle EFB$ ,  $\triangle ADE$  имеется в наличии доминирующая величина среди переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т.е. величина, превышающая сумму двух других. В дальнейшем процесс выделения сторон треугольников можно продолжить, что и представлено на рис.3.

### 3. Анализ итерационного метода построения фрактала

Теперь вернёмся к уравнению (1) и перепишем его после итерационных преобразований в виде

$$x_{n+1} = \xi(\dots\xi(\xi(\xi\lambda_0 + \lambda_1) + \lambda_2) + \dots + \lambda_n) \quad (4)$$

или, после раскрытия скобок и приведения подобных,

$$x_{n+1} = \lambda_0 \xi^n + \lambda_1 \xi^{n-1} + \dots + \lambda_n \xi, \quad (5)$$

где  $0 < \xi < 1$ ,  $\lambda_i = (1 - \xi)\xi^{-1} z_j^{(i)}$ . Из соотношения (5) непосредственно следует, что процедура РСИФ не будет заикливаться, а аттрактор будет представлен в виде объединения одноточечных множеств. Выражение (5) можно представить в виде

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \xi^i z_j^{(i)} \quad (6)$$

Перегруппировав слагаемые абсолютно сходящегося ряда, получим

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^K a_j z_j^{(i)} \quad (7)$$

где  $a_j = \sum_s \xi^s$ ,  $s$  – номера обобранных элементов ряда при  $z_j$  в формуле (7). При этом выполняются следующие соотношения:  $a_j \geq 0$ ,  $\sum_j a_j = 1$ . Заметим, что в данном случае фактически для

вычисления коэффициентов  $a_j$  используется урновая схема [5]. В дальнейшем из этих коэффициентов формируются векторы  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iK})$ , которые образуют матрицу размером  $N \times K$  [4]. С помощью этой матрицы можно построить тот же треугольник Серпинского:  $X = AZ$  (см. рис.2).

Покажем, что среди элементов векторов  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iK})$  существует доминирующий элемент, т.е. такой, величина которого превосходит сумму всех остальных:  $\hat{a}_{im} \equiv a_{im} > \sum_{j \neq m} a_{ij}$

$$\hat{a}_{im} \equiv a_{im} > \sum_{j \neq m} a_{ij} \quad (8)$$

**Теорема.** Для того, чтобы набор  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iK})$  был набором, генерированным процедурой РСИФ (1) необходимо и

достаточно, чтобы для его элементов выполнялось условие (8), т.е. среди его элементов существовал доминирующий элемент.

Необходимость. Пусть  $0 < \xi < 1$ , тогда  $\sum_{i=1}^{\infty} \xi^i = \frac{\xi}{1-\xi} \equiv \mu^{-1}$ .

Величину  $\mu = \frac{1-\xi}{\xi}$  можно рассматривать как нормировочную константу в выражении

$$\mu \sum_{i=1}^{\infty} \xi^i = 1 \quad (9)$$

В этом случае первый член ряда (9) будет равняться

$$\mu \xi = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad (10)$$

а сумма оставшихся членов ряда

$$1 - \frac{\mu}{1+\mu} = \frac{1}{1+\mu}, \quad (11)$$

Очевидно, что неравенство (8) будет выполнено при  $\mu > 1$ .

Достаточность. Пусть среди элементов вектора  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iK})$  имеется доминирующий, т.е. выполнено условие (8). Покажем, что значение параметра  $\xi$  можно определить так, что процедура РСИФ будет приводить к сходящемуся ряду (9). Пусть  $\hat{a}_{im} \equiv a_{im}$  доминирующий элемент, т.е. имеет место (8). Рассмотрим равенство  $a_{im} + \sum_{j \neq m} a_{ij} = 1$ , из которого и (8) будет следовать, что  $a_{im} > \frac{1}{2}$ , а соответственно  $\sum_{j \neq m} a_{ij} < \frac{1}{2}$ . Полученные соотношения означают, что первый член ряда (9) должен входить в  $a_{im}$ . Рассмотрим соотношение (10) как функцию параметра  $\mu$

$$f(\mu) = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad (12)$$

Учитывая, что  $f(1) = 1/2$ ,  $f'(\mu) > 0$ , значения выражения (12) при  $\mu \geq 1$  будет не меньше  $1/2$ , и, следовательно, неравенство (8) будет выполнено.

**Заключение.**

Установленные факты наличия доминирующего элемента в построении фракталов итеративными методами позволяют, во-первых, перейти от геометрических методов к цифровым [2, 7]. Во - вторых, позволяют объяснить почему закон больших чисел и основанное на нём нормальное распределение [8] приводят к неадекватным результатам в исследовании многих экономических процессов, имеющих фрактальную природу [9]. Ведь как известно, условия центральной предельной теоремы [7] «по существу сводятся к требованию, чтобы влияние на сумму отдельных слагаемых было *равномерно малым* [курсив автора учебника], т.е. чтобы в состав суммы не входили члены, явно преобладающие над совокупностью остальных по своему влиянию на рассеивание суммы». Вместе с тем выявленные взаимосвязи являются основой доказательства самоподобия фрактальных множеств и гомеоморфности фрактальных преобразований [9]. Эти свойства в свою очередь дают возможность использовать фрактальную теорию в задачах сжатия информации [11], моделировании перколяционных процессов [10], прогнозировании временных рядов экономических показателей [12].

### Список литературы

2. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. / Р.М. Кроновер. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2006. – 488 с.
3. Barnsley, M.F. Fractals Everywhere/ M.F. Barnsley – NewYork: Academic, 1988.
4. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы/ Б. Мандельброт. – М., 2002, 656 стр.
5. Bukhovets, A. G. Modeling of fractal data structures / A. G. Bukhovets, E. A. Bukhovets // Automation and Remote Control. – 2012. – Vol. 73. – No 2. – P. 381-385. – DOI 10.1134/S0005117912020154
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1/В. Феллер – М.: Мир, 1967. – 498 с.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель – М.: Наука, 1964. – 576 с.
8. Буховец, А. Г. Структура аттрактора рандомизированных систем итерированных линейных функций / А. Г. Буховец, Т. Я. Бирючинская. // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2016. – № 2. – С. 5-10
9. Bukhovets, A. G. Conditions for homeomorphism of sets modeled by randomized iterated function systems / A. G. Bukhovets, P. V. Moskalev, E. A. Semin // Journal of Physics: Conference Series, Voronezh, 11–13 ноября 2019

года. – Voronezh: IOP Publishing Ltd, 2020. – P. 012025. – DOI 10.1088/1742-6596/1479/1/012025.

10. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитал /Э. Петерс, пер. с англ. – М.: Мир. 2000 – 333 с.

11. Москалев, П. В. Перколяционное моделирование пористых структур / П. В. Москалев. – Москва : URSS, 2018. – 240 с. – ISBN 978-5-9710-4963-0.

12. Уэлстид, С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии /С. Уэлстид. – М.: Изд-во Триумф, 2003 – 320 с.

13. Мандельброт, Б. Фракталы, случай и финансы// Б. Мандельброт. – М.-Ижевск, 2004, 256 с.